Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2016

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednačinu

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13.$$

Rješenje: Datu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$(2^a - 3) \cdot 3^b = 13 - 2^a.$$

Kako je $3^b > 0$, to brojevi $2^a - 3$ i $13 - 2^a$ moraju biti istog znaka, pa važi $3 < 2^a < 13$.

To zadovoljavaju samo brojevi $a = 2$ i $a = 3$.

Za $a = 2$ imamo $1 \cdot 3^b = 9$, pa je $b = 2$.

Za $a = 3$ imamo $5 \cdot 3^b = 5$, pa je $b = 0$.

Dakle, jedina rješenja su parovi $(2, 2)$ i $(3, 0)$. $\square$

2. (a) Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}(x + y).$$

(b) Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da $xyz = 1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^3 + z^3}{x^2 + xz + z^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} \geq 2.$$

Rješenje: (a) Primijetimo da važi:

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3}(x+y) &\Longleftrightarrow 3(x^3+y^3) \geq (x+y)(x^2+xy+y^2) \\
&\Longleftrightarrow 3(x+y)(x^2-xy+y^2) \geq (x+y)(x^2+xy+y^2) \\
&\Longleftrightarrow 3(x^2-xy+y^2) \geq x^2+xy+y^2 \\
&\Longleftrightarrow 2(x^2-2xy+y^2) \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

(b) Koristeći rezultat iz (a), slijedi

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{x^3+z^3}{x^2+xz+z^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2} \\
&\geq \frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{3}(x+z)+\frac{1}{3}(z+y)=\frac{2}{3}(x+y+z) \geq 2\sqrt[3]{xyz}=2,
\end{aligned}
$$

gdje smo u predposljednjem koraku koristili odnos između aritmetičke i geometrijske sredine. □

3. Na šahovsku tablu dimenzija 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da ne postoje dva koja su na istom polju. Pri tome 25 žetona zauzimaju donju lijevu četvrtinu table, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z preskočivši žeton na polju Y.

Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovinu table?

Rješenje: Žetoni u donjoj lijevoj četvrtini zauzimaju 12 bijelih i 13 crnih polja, a žetoni u gornjoj desnoj četvrtini takođe zauzimaju 12 bijelih i 13 crnih polja (u donjem lijevom uglu je crno polje).

Primijetimo da žetoni svojim kretanjem uvijek prolaze sa crnog na crno, odnosno sa bijelog na bijelo polje, bez obzira kreću li se horizontalno, dijagonalno ili vertikalno.

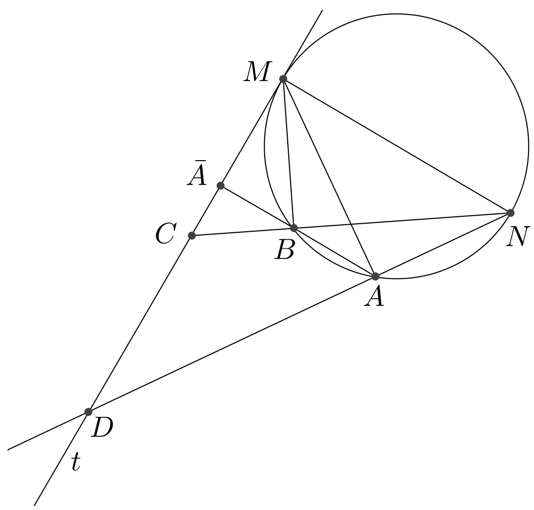
Zato se broj crnih (odnosno bijelih) polja koje žetoni zauzimaju ne mijenja.

Kako žetoni u početku zauzimaju $12 + 12 = 24$ bijela i $13 + 13 = 26$ crnih polja, a donja polovina table se sastoji od 25 bijelih i 25 crnih polja, to zaključujemo da je nemoguće postići da se svi žetoni nalaze na donjoj polovini table. □

4. Tetiva AB je paralelna sa prečnikom MN kružnice k. Neka je t tangenta na kružnicu k u tački M i neka su C i D tačke presjeka pravih NB i NA, redom, sa tangentom t. Dokazati da je

$$|MC| \cdot |MD| = |MN|^2.$$

Rješenje:



Neka je $\bar{A}$ podnožje normale iz tačke A na tangentu t. Važi da je

$$\angle MNB = \angle MNC \cong \angle MAB = \angle MA\bar{A} \tag{1}$$

kao periferijski uglovi kružnice k nad tetivom MB.

Posmatrajmo trouglove MNC i $\bar{A}AM$. Oni su pravougli i važi $\angle MNC = \angle MA\bar{A}$. Zato su ova dva trougla slična. Iz ove sličnosti dobijamo

$$|MN| : |MC| = |\bar{A}A| : |M\bar{A}|. \tag{2}$$

Takođe važi

$$\angle BNA \cong \angle BMA \tag{3}$$

kao periferijski uglovi kružnice k nad i tetivom AB. Osim toga $\angle \bar{A}MB$ je ugao između tetive MB i tangente u tački M kružnice k. Slijedi

$$\angle \bar{A}MB \cong \angle MA\bar{A}, \tag{4}$$

jer je $MA\bar{A}$ periferijski ugao kružnice k nad tetivom MB. Iz (1), (3) i (4) dobijamo da je

$$\angle MND = \angle MNC + \angle CND \cong \angle \bar{A}MB + \angle BMA = \angle \bar{A}MA.$$

Posmatrajmo trouglove MDN i $\bar{A}AM$. Oni su pravougli i važi $\angle MND \cong \angle \bar{A}MA$. Zato su ova dva trougla slična, što daje

$$|MD| : |MN| = |\bar{A}A| : |M\bar{A}|.$$

Uvrštavanjem u (2) dobijamo da je

$$|MN| : |MC| = |MD| : |MN|,$$

odnosno

$$|MN|^2 = |MC| \cdot |MD|.$$

□