Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2016

Takmičenje iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Dat je polinom

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = (x+1)^{2016}(x+2)^{2016}\ldots(x+2016)^{2016}.$$

Izračunati

$$2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2016\cdot 2016}).$$

Rješenje: Polinom $P(x)$ je polinom stepena 2016^2 tj. $n = 2016^2$. Važi:

$$\begin{aligned} P(1) &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{2016^2} \\ P(-1) &= a_0 - a_1 + \cdots + a_{2016^2} \\ P(0) &= a_0. \end{aligned}$$

Sabiranjem prve dvije relacije i oduzimanjem dvostruke treće, dobijamo:

$$P(1) + P(-1) - 2P(0) = 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2016^2}).$$

Kako je

$$\begin{aligned} P(0) &= 1^{2016} \cdot 2^{2016} \cdots 2016^{2016}, \\ P(1) &= 2^{2016} \cdot 3^{2016} \cdots 2016^{2016} \cdot 2017^{2016}, \\ P(-1) &= 0, \end{aligned}$$

to dobijamo

$$2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2016^2}) = 2^{2016} \cdot 3^{2016} \cdots 2016^{2016}\left(2017^{2016} - 2\right).$$

$\square$

2. Odrediti sve prirodne brojeve x i y za koje važi

$$1! + 2! + \cdots + x! = y^2.$$

Rješenje: Očigledna rješenja su $x = 1$, $y = 1$ i $x = 3$, $y = 3$. Za $x = 4$ ne postoji cjelobrojno y tako da su ispunjeni uslovi zadatka. Pretpostavimo da je $x \geq 5$. Tada je

$$6! + 7! + \cdots + x! = 5k \cdot 4! \cdot 6$$

za neko $k \in \mathbb{N}_0$, pa je

$$1! + 2! + \cdots + x! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 5k \cdot 4! \cdot 6 = 9 + 9 \cdot 16 \cdot (1 + 5k).$$

Otuda

$$1! + 2! + \cdots + x! = y^2 \Longrightarrow 16 \cdot (1 + 5k) = \frac{y^2}{9} - 1,$$

odnosno

$$16 \cdot (1 + 5k) = z^2 - 1 \text{ i } z^2 = \frac{y^2}{9}.$$

Kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 5 daje ostatke 1, 4 i 0, pa $z^2 - 1 \not\equiv 1 \pmod 5$, a sa druge strane

$$16 \cdot (1 + 5k) \equiv 1 \pmod 5,$$

što povlači da za $x \geq 5$ data jednačina nema rješenja. Dakle, jedina rješenja su $x = 1$, $y = 1$ i $x = 3$, $y = 3$. $\square$

3. Tri broja čine rastući aritmetički niz. Ako drugi član povećamo za 1, a treći za 10, niz postaje geometrijski. Ako je najmanji od datih brojeva jednak 2, odrediti te brojeve.

Rješenje: Iz uslova zadatka, brojevi

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3 + d \;\text{ i }\; a_3 = 12 + 2d$$

čine geometrijski niz. Dakle,

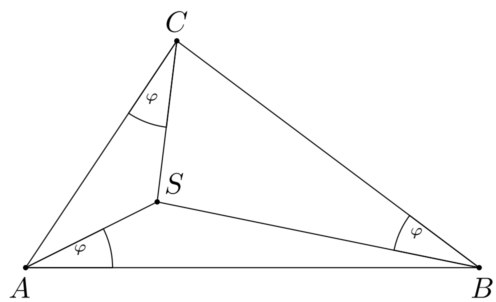
$$(3+d)^2 = 2 \cdot (12+2d) \implies d = 3 \text{ ili } d = -5.$$

Traženi brojevi su, zbog činjenice da je niz rastući, 2, 5 i 8. $\square$

4. Unutar trougla ABC data je tačka S tako da je $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA = \varphi$. Ako su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla ABC dokazati da važi:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Rješenje:



Koristeći sinusnu teoremu, površine trouglova ABS, BCS i CAS su date sa:

$$P_{ABS} = \frac{1}{2}|AB||AS|\sin\varphi,\ P_{BCS} = \frac{1}{2}|BC||BS|\sin\varphi,\ P_{CAS} = \frac{1}{2}|AC||CS|\sin\varphi.$$

Takođe, površina trougla ABC se može računati kao:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\alpha = \frac{1}{2}|AB||BC|\sin\beta = \frac{1}{2}|AC||BC|\sin\gamma.$$

Važi da je

$$P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS},$$

odnosno

$$P = P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB||AS|\sin\varphi + \frac{1}{2}|BC||BS|\sin\varphi + \frac{1}{2}|AC||CS|\sin\varphi.$$

Dijeljenjem ovog izraza sa P i $\sin\varphi$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{1}{2P}|AB||AS| + \frac{1}{2P}|BC||BS| + \frac{1}{2P}|AC||CS| \\
&= \frac{|AB||AS|}{|AB||AC|\sin\alpha} + \frac{|BC||BS|}{|AB||BC|\sin\beta} + \frac{|AC||CS|}{|AC||BC|\sin\gamma} \\
&= \frac{|AS|}{|AC|\sin\alpha} + \frac{|BS|}{|AB|\sin\beta} + \frac{|CS|}{|BC|\sin\gamma}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Sa druge strane, ako posmatramo trougao ASC, uočavamo da je $\angle CAS = \alpha - \varphi$ i $\angle ASC = \pi - \varphi - (\alpha - \varphi) = \pi - \alpha$. Primjenjujući sinusnu teoremu na ovaj trougao dobijamo da je

$$\frac{|AS|}{|AC|} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

Na isti način iz trouglova ABS i BCS dobijamo

$$\frac{|BS|}{|AB|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}, \ \frac{|CS|}{|BC|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}.$$

Ako ovo uvrstimo u formulu (1) dobijamo

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\beta} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\gamma},$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$