Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2016

Takmičenje iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Dokazati da izraz

$$\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)$$

ne zavisi od x.

Rješenje: Koristimo adicionu formulu za razliku uglova:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(x-\frac{2016\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2017\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2018\pi}{3}\right)\\
&=\sin^2\left(x-672\pi\right)+\sin^2\left(x-672\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-672\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=\sin^2(x)+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\\
&=\sin^2(x)+\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2+\left(\sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\
&=\frac{3}{2}\sin^2(x)+\frac{3}{2}\cos^2(x)=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

2. Dat je polinom

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=(x+1)^{2016}(x+2)^{2016}\dots(x+2016)^{2016}.$$

Izračunati

$$2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2016\cdot 2016}).$$

Rješenje: Polinom $P(x)$ je polinom stepena 2016^2 tj. $n = 2016^2$. Važi:

$$\begin{aligned} P(1) &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{2016^2} \\ P(-1) &= a_0 - a_1 + \cdots + a_{2016^2} \\ P(0) &= a_0. \end{aligned}$$

Sabiranjem prve dvije relacije i oduzimanjem dvostruke treće, dobijamo:

$$P(1) + P(-1) - 2P(0) = 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2016^2}).$$

Kako je

$$\begin{aligned} P(0) &= 1^{2016} \cdot 2^{2016} \cdots 2016^{2016}, \\ P(1) &= 2^{2016} \cdot 3^{2016} \cdots 2016^{2016} \cdot 2017^{2016}, \\ P(-1) &= 0, \end{aligned}$$

to dobijamo

$$2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2016^2}) = 2^{2016} \cdot 3^{2016} \cdots 2016^{2016} \left(2017^{2016} - 2\right).$$

$\square$

3. Niz (a_n) definisan je sa $a_1 = 1$ i $a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ za $n > 1$. Odrediti sve indekse n za koje je broj a_n djeljiv sa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Rješenje: Primijetimo da je $a_1 = 1$ djeljiv sa $1!$. Za $n \geqslant 2$ neka je $s_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$. Tada je $a_n = n \cdot s_n$ i

$$s_n = s_{n-1} + a_{n-1} = s_{n-1} + (n-1) \cdot s_{n-1} = n \cdot s_{n-1},$$

za $n \geqslant 2$. Dakle,

$$s_n = n \cdot s_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot s_{n-2} = \cdots = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot s_2 = \frac{n!}{2}.$$

Slijedi da je za svako $n \geqslant 2$

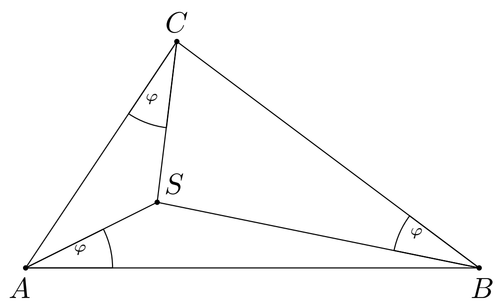
$$a_n = n \cdot s_n = n \cdot \frac{n!}{2},$$

pa je za sve parne $n \geqslant 2$ broj a_n djeljiv sa $n!$. $\square$

4. Unutar trougla ABC data je tačka S tako da je $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCA = \varphi$. Ako su α, β i γ unutrašnji uglovi trougla ABC dokazati da važi:

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}.$$

Rješenje:



Koristeći sinusnu teoremu, površine trouglova ABS, BCS i CAS su date sa:

$$P_{ABS} = \frac{1}{2}|AB||AS| \sin \varphi,\ P_{BCS} = \frac{1}{2}|BC||BS| \sin \varphi,\ P_{CAS} = \frac{1}{2}|AC||CS| \sin \varphi.$$

Takođe, površina trougla ABC se može računati kao:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \alpha = \frac{1}{2}|AB||BC| \sin \beta = \frac{1}{2}|AC||BC| \sin \gamma.$$

Važi da je

$$P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS},$$

odnosno

$$P = P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB||AS| \sin \varphi + \frac{1}{2}|BC||BS| \sin \varphi + \frac{1}{2}|AC||CS| \sin \varphi.$$

Dijeljenjem ovog izraza sa P i $\sin\varphi$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{1}{2P}|AB||AS| + \frac{1}{2P}|BC||BS| + \frac{1}{2P}|AC||CS| \\ &= \frac{|AB||AS|}{|AB||AC|\sin\alpha} + \frac{|BC||BS|}{|AB||BC|\sin\beta} + \frac{|AC||CS|}{|AC||BC|\sin\gamma} \\ &= \frac{|AS|}{|AC|\sin\alpha} + \frac{|BS|}{|AB|\sin\beta} + \frac{|CS|}{|BC|\sin\gamma}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Sa druge strane, ako posmatramo trougao ASC, uočavamo da je $\angle CAS = \alpha - \varphi$ i $\angle ASC = \pi - \varphi - (\alpha - \varphi) = \pi - \alpha$. Primjenjujući sinusnu teoremu na ovaj trougao dobijamo da je

$$\frac{|AS|}{|AC|} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

Na isti način iz trouglova ABS i BCS dobijamo

$$\frac{|BS|}{|AB|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}, \ \frac{|CS|}{|BC|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}.$$

Ako ovo uvrstimo u formulu (1) dobijamo

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\beta} + \frac{\sin\varphi}{\sin^2\gamma},$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$